Primitives et équations différentielles

Primitive

EXERCICE 1

Prouver dans les cas suivantes que la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I proposé.

1) $f(x) = \dfrac{2(x^4-1)}{x^3}$ et $F(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ sur $I =]0\,;+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ et $F(x) = x - \ln(1+e^x)$ sur $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ et $F(x) = \ln(\ln x)$ sur $I =]1\,;+\infty[$

4) $f(x) = \cos x - x\sin x$ et $F(x) = x\cos x$ sur $I = \mathbb{R}$

EXERCICE 2

On donne $F(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$ et $G(x) = \dfrac{x^2+7x-5}{x-1}$.

1) Montrer que les fonction F et G sont deux primitives de la même fonction f sur un intervalle I que l'on précisera.
2) Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Calcul de primitive

Pour les exercices suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

EXERCICE 3

Linéarité de la primitive

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 3$, $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{3}$, $I = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^3}$, $I =]0\,;+\infty[$.

4) $f(x) = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 1$, $I =]0\,;+\infty[$.

5) $f(x) = \dfrac{4}{x} + 2e^x$, $I =]0\,;+\infty[$.

EXERCICE 4

Forme $u'u^n$

1) $f(x) = (x+2)^3$, $I = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = 2x(1+x^2)^5$, $I = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = \dfrac{(x-1)^5}{3}$, $I = \mathbb{R}$.

4) $f(x) = 2x(3x^2-1)^3$, $I = \mathbb{R}$.

5) $f(x) = \sin x \cos x$, $I = \mathbb{R}$.

6) $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$, $I =]0\,;+\infty[$.

Exercice 5

Forme $\dfrac{u'}{u}$

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$, $I =]4\,;+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$, $I =]-\infty\,;\,4[$

3) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$, $I =]0\,;\,1[$

4) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+2}$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 6

Forme $\dfrac{u'}{u^n}$, $n \geqslant 2$

1) $f(x) = \dfrac{2}{(x+4)^3}$, $I =]-4\,;+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}$, $I = \left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{3}\right[$

3) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}$, $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$, $I =]-1\,;\,3[$

5) $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3+8)^3}$, $I =]-2\,;+\infty[$

6) $f(x) = \dfrac{2\sin x}{\cos^2 x}$, $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 7

Forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$

1) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}$, $I = \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

2) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$, $I =]1;+\infty[$

Exercice 8

Forme $u'e^u$

1) $f(x) = e^{-x+1}$, $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 2e^{3x-2}$, $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \sin x \times e^{\cos x}$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 9

Forme $u' \times (v' \circ u)$

1) $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x)$, $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 3\cos x - 2\sin(2x) + 1$, $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$, $I = \mathbb{R}$

Primitives vérifiant une condition initiale

Exercice 10

Déterminer la primitive F, de la fonction f, qui vérifie la condition donnée sur un intervalle I à préciser.

1) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4x + 1$, $F(2) = 0$

2) $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + x$, $F(1) = 0$

3) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$, $F(0) = 0$

4) $f(x) = -\dfrac{1}{3-x}$, $F(1) = 1$

5) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$, $F(0) = 0$

6) $f(x) = e^{3x+1}$, $F(-1) = 0$

7) $f(x) = xe^{-x^2}$, $F(\sqrt{\ln 2}) = 1$

8) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$, $F(2) = 0$

9) $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

10) $f(x) = \cos x \sin^2 x$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

11) $f(x) = 2\cos\dfrac{x}{2} - 3\sin\dfrac{x}{2}$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

Calculs de primitives plus difficiles

EXERCICE 11

Calculer une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiquée.

1) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3-1}$, $I =]-\infty\,;\,1[$

2) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $I =]-\pi\,;\,0[$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}$, $I =]0\,;+\infty[$

4) $f(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, $I =]0\,;+\infty[$

5) $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$, $I =]0\,;+\infty[$

6) $f(x) = \dfrac{\ln x}{2x}$, $I =]0\,;+\infty[$

7) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$, $I =]1\,;+\infty[$

8) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $I = \mathbb{R}$

EXERCICE 12

f désigne une fonction rationnelle définie sur un intervalle I. Déterminer une primitive de f à l'aide de la décomposition proposée.

1) $f(x) = \dfrac{4x+5}{2x+1}$, $I = \left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$. Montrer que $f(x) = a + \dfrac{b}{2x+1}$

2) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-4}{x-2}$, $I =]2\,;+\infty[$. Montrer que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x+3}$ avec :

a) $I =]3\,;+\infty[$ b) $I =]-3\,;\,3[$ c) $I =]-\infty\,;-3[$

4) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$, $I =]1\,;+\infty[$. Montrer que $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$

Équations différentielles

EXERCICE 13

Résoudre l'équation différentielle proposée :

1) $y' = 3y$

2) $y' + 2y = 0$

3) $y' = 2y + 1$

4) $y + 3y' = 2$

5) $2y + 3y' - 1 = 0$

6) $2y' = y - 1$

EXERCICE 14

Résoudre les équations différentielles proposées avec la condition initiale proposée :

1) $y = -5y'$ avec $f(-2) = 1$

2) $y + 2y' = 0$ avec $f'(-2) = \dfrac{1}{2}$

EXERCICE 15

Trouver une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ pour laquelle f est solution.

1) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3e^{-3x}$.

2) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3e^{-2x} - 4$.

Applications aux sciences

EXERCICE 16

Le nombre de bactéries $N(t)$ d'une culture initialement à 600 passe au boût de 2 heures à 1 800.
On suppose que le taux de croissance est proportionnel au nombre de bactéries présentes.

1) a) Donner une équation différentielle qui traduit le problème puis déterminer $N(t)$ à l'aide des conditions imposées.

   b) Déterminer le nombre de bactéries après 4 heures.

   c) Déterminer le temps t nécessaire pour que le nombre de bactéries dépasse 12 000.

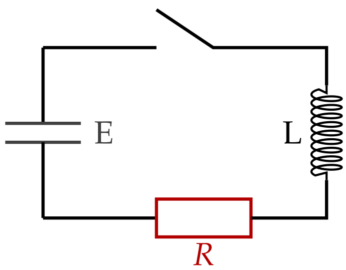
2) Compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il donne le résultat attendu à la question 1 c) (à la demi-heure près).

```
from math import*
t=0
N=600
while .... 12000:
    t=...
    N=...
print(...)
```

EXERCICE 17

Le circuit ci-contre comprend une bobine d'induction L, une résistance R. L'origine du temps est à la fermeture du circuit.
À $t = 0$, l'intensité i est nulle. La force électromotrice aux borne du circuit est constante et égale à E. On sait que l'intensité $i(t)$ est telle que, à l'instant $t > 0$ on a :

$$\mathrm{L}i'(t) + \mathrm{R}i(t) = \mathrm{E}$$



1) Résoudre cette équation différentielle. Trouver la fonction i telle que $i(0) = 0$.

2) Déterminer la limite de $i(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
   Commenter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Équation de la forme $y' = ay + f(x)$

EXERCICE 18

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = e^{2x}$.

1) Déterminer le réel a tel que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = ae^{2x}$ soit une solution particulière de (E).
2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).
3) Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

EXERCICE 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
2) En déduire que h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de (E').
3) Vérifier que g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de (E).
4) En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Partie B

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 1 cm.

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2) Étudier les variations puis dresser le tableau de variations de f.
3) Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec les axes.

EXERCICE 20

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$

1) Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$
2) Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3) Étudier les variations puis dresser le tableau de variations de f.

Partie B

1) On a étudié l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, en centaine d'individus, au temps t, en années, est notée $g(t)$. La fonction g, définie de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, modèle choisi pour décrire cette évolution , est une solution de l'équation différentielle : (E_1) : $y' = \dfrac{y}{4}$.
   a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).
   b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.

c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2) En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions

$$(\mathrm{E}_2)\ :\ \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u^2(t)}{12} & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

a) On suppose que u ne s'annule pas pour $t > 0$.

Soit la fonction h définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement si, la fonction h satisfait aux conditions :

$$(\mathrm{E}_3)\ :\ \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

b) Donner les solutions de l'équation différentielle : $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$.

et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$